Les Tenseurs sans espace dual

Michel Lévy

15 septembre 2023

Table des matières

Résumé

On présente le calcul tensoriel, sans utiliser la notion d'espace dual. Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels de dimension finie n, muni d'un produit scalaire.

Un tenseur d'ordre p est simplement une application multilinéaire de E^p dans les réels.

Nous montrons tout d'abord comment le produit scalaire nous permet d'associer à une base $e_{i(0 \leq i < n}$ de E, dite covariante, une base $e^{i(0 \leq i < n}$, dite contravariante. Puis nous définissons des opérations sur les tenseurs, qui dotent l'ensemble des tenseurs de même ordre d'une structure d'espace vectoriel. Nous présentons les bases de cet espace et les coordonnées d'un tenseur sur une de ces bases.

1 Espace vectoriel euclidien

On suppose connu ce qu'est un espace vectoriel. Pour des rappels de diverses définitions, on se reportera aux sources suivantes : Wikipedia ainsi que [9] et [12] pour des rappels clairs d'algèbre linéaire, [3] pour une introduction au calcul tensoriel proche de mon texte. Dans la suite, on ne considère que des espaces vectoriels de dimension *finie* sur le corps des réels.

1.1 Bases, coordonnées

Soient i, j deux indices de domaine l'intervalle $0, n-1$. Quand ce domaine est connu, on peut abréger $\sum_{i=0}^{n-1}$ en $\sum_i$.

On peut aussi abréger $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}$ en $\sum_{i,j}$. On abrégera de même les sommes portant sur plus de deux indices. Mais, contrairement aux usages des physiciens, je n'utiliserai pas la convention d'Einstein, qui permet d'éviter le signe somme sur un produit de variables comportant le même indice, une fois en indice inférieur et une fois en indice supérieur [1]

Soit E un espace vectoriel sur le corps des *réels*, de dimension n. Puisque ce document est destiné essentiellement aux physiciens, nous considérerons *uniquement* des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps des réels et dans la suite nous omettrons de rappeler que le corps utilisé est celui des réels.

Soit $e_{i(0 \leq i < n)}$ une base de E. Par convention, cette base, dont les élements sont indicés *inférieurement*, est une base *covariante* de E. Soit $x \in E$. D'après les propriétés des bases, il existe une et une seule suite x^i de coordonnées de x telle que $x = \sum_i x^i e_i$.

La valeur x^i est la coordonnée *contravariante* d'indice supérieur i sur la base *covariante* des e_i.

1. Pour le lecteur habitué à la convention d'Enstein, nous avons adopté une disposition des indices permettant la lecture de ce document en ignorant les symboles sommes et en utilisant cette convention sur les expressions où il aura enlevé les sommes

Définition 1 (Symbole de Kronecker) *Les quatre symboles* $\delta_{ij}, \delta_i{}^j, \delta^{ij}, \delta^i j$ *sont les symboles de Kronecker. Ils valent* 1 *si* $i = j$ *et* 0 *si* $i \neq j$.

Dans Wikipedia : les symboles de Kronecker, on note que $\delta_i{}^j$ et $\delta^i{}_j$ sont réunis en un seul symbole δ_i^j.

Mais, pour nous familiariser avec les notations des coordonnées des tenseurs adoptées plus tard, nous préférons notre notation où il n'y a pas d'indices superposés. Attention dans ce texte, le mot indice désigne un indice inférieur ou *supérieur*. Pour des raisons, qui seront vues ultérieurement, un indice inférieur est aussi appelé un indice covariant et un indice supérieur est aussi appelé un indice contravariant.

Propriété 2 (relation entre deux bases) *Soient* $e_{i(0 \leq i < n)}$ *et* $e'_{i(0 \leq i < n)}$ *deux bases de* E. *Puisque tout élement de* E *est une combinaison linéaire des éléments d'une base de* E, *il existe* n^2 *éléments du corps* K, $\lambda_i{}^j$ *tels que* $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ *et* n^2 *éléments du corps* K, $\mu_i{}^j$ *tels que* $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$. *Il en résulte que* $\sum_j \mu_i{}^j \lambda_j{}^k = \sum_j \lambda_i{}^j \mu_j{}^k = \delta_i{}^k$.

Preuve : De deux équations $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$, on déduit que $e_i = \sum_{j,k} \mu_i{}^j \lambda_j{}^k e_k$.

De l'unicité de la décomposition dans les bases, il résulte que $\sum_j \mu_i{}^j \lambda_j{}^k = \delta_i{}^k$.

En échangeant le rôle de e_i et de e'_i, on a aussi $\sum_j \lambda_i{}^j \mu_j{}^k = \delta_i{}^k$. □

Convention 3 (représentation des suites par des matrices) *Une suite à au plus deux indices peut être représentée par une matrice. Convenons de la représentation suivante. La suite à deux indices* t_{ij} *(respectivement* $t_i{}^j$, $t^i{}_j$, t^{ij}*), où* $0 \leq i < n$, $0 \leq j < n$, *est représentée par une matrice* T *de type* $n * n$ *dont l'élément de ligne* i *et de de colonne* j, *noté* $T[i, j]$ *est égal à* t_{ij} *(respectivement* $t_i{}^j$, $t^i{}_j$, t^{ij}*). Notons que* contrairement *aux conventions usuelles, la première ligne et la première colonne de la matrice sont d'indice* 0.

La matrice T *associée à une suite peut aussi être notée en mettant cette suite entre crochets. Par exemple* $[t_{ij}]$ *est la matrice associée à la suite* t_{ij}.

La suite à un indice u_i *(respectivement* u^i*) où* $0 \leq i < n$ *est representée par une matrice colonne* U *de type* $n * 1$ *où* $U[i] = u_i$ *(respectivement* $U[i] = u^i$*). Comme cidessus, la suite entre crochets désigne la matrice associée à la suite.*

Nous traduisons en terme de matrices la propriété 2.

Propriété 4 (relation matricielle entre deux bases) *Soient* $e_{i(0 \leq i < n)}$ *et* $e'_{i(0 \leq i < n)}$ *deux bases de* E. *Soit* $\lambda_i{}^j$ *les* n^2 *réels tels que* $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ *et* $\mu_i{}^j$ *les* n^2 *réels tels que* $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$. *Soit* L *la matrice associée à la suite* $\lambda_i{}^j$ *et* M *la matrice à la suite* $\mu_i{}^j$. *Soit* I *la matrice identité (associée à la suite* $\delta_i{}^j$*).*

On a : $ML = LM = I$. *Autrement dit les matrices* L *et* M *sont les inverses l'une de l'autre.*

Nous allons montrer comme changent les coordonnées quand on change de base.

Propriété 5 (des changements de bases aux changements des coordonnées contravariantes) *Soit $e_{i(0\leq i<n)}$ et $e'_{i(0\leq i<n)}$ deux bases de E telles que pour tout i, $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$.*

Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. Pour tout i, $x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$.

Preuve : Par définition des e'_i, on a $x = \sum_i x'^i e'_i = \sum_{i,j} x'^i \lambda_i{}^j e_j$.

En permutant i et j dans la dernière somme, on a $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i (\sum_j \lambda_j{}^i x'^j) e_i$.

Par unicité de la décomposition sur une base, il en résulte que $x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$.

$\square$

Propriété 6 (expression matricielle de 5) *Soit B la matrice (colonne) associée à la suite $e_{i(0\leq i<n)}$ et B' la matrice (colonne) associée à la suite $e'_{i(0\leq i<n)}$. La condition $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ se traduit par $B' = LB$ où L est la matrice associée à la suite $\lambda_i{}^j$.*

Soit X la matrice (colonne) associée à la suite des x^i et X' celle associée à la suite des x'^i. D'après la propriété ci-dessus, $x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$. Soit $\mu_i{}^j$ la suite telle que $\lambda_j{}^i = \mu_i{}^j$. Nous avons $x^i = \sum_j \mu_i{}^j x'^j$. La matrice associée à la suite $\mu_i{}^j$ est la matrice L^T la transposée de L. Puisque $x^i = \sum_j \mu_i{}^j x'^j$, nous avons $X = L^T X'$.

Dans Wikipedia matrice de passage, B dénote aussi la base des e_i et B' celle des e'_i. Avec cette notation, on remarque que L^T est la matrice de passage de la base B à la base B'. Cette matrice est notée dans Wikipedia $P_B^{B'}$,

Propriété 7 (des changements de coordonnées contravariantes aux changements de bases) *Soit $e_{i(0\leq i<n)}$ et $e'_{i(0\leq i<n)}$ deux bases de E. Supposons que pour tout $x \in E$ tel que $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$, on a pour tout i, $x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$. Alors on a pour tout i, $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$*

Preuve : Supposons que le changement de bases soit défini pour tout i, par $e'_i = \sum_j \nu_i{}^j e_j$.

Et montrons que pour tous i et j, $\nu_i{}^j = \lambda_i{}^j$.

Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$.

D'après la propriété 5, pour tout i, $x^i = \sum_j \nu_j{}^i x'^j$. Par hypothèse $x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$. Donc pour tout i

$$\sum_j \nu_j{}^i x'^j = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j$$

Soit $x = e'_j$. Dans ce cas $x'^j = 1$ et pour tout $k \neq j$, $x'^k = 0$. De l'égalité ci-dessus, il résulte que pour tous i, j, $\nu_i{}^j = \lambda_i{}^j$. $\square$

1.2 Produit scalaire, base contravariante

Dans ce paragraphe, nous définissons, de deux façons équivalentes, ce qu'est un produit scalaire.

Définition 8 (Produit scalaire, espace vectoriel euclidien) *Soit E un espace vectoriel. Soit $g : E^2 \to \mathbb{R}$.*

1. *L'application g est symétrique lorsqu'elle vérifie pour tous $x,y \in E, g(x,y) = g(y,x)$.*
2. *L'application g est non dégénérée, si pour tout $u \in E$ elle vérifie* si *pour tout $v \in E, g(u,v) = 0$* alors $u = 0$
3. *L'application g est un produit scalaire si g est linéaire (en ses deux arguments), si g est symétrique, et si g est non dégénérée.*

Le couple (E,g) est un espace vectoriel euclidien *si l'application g est un produit scalaire.*

Propriété 9 *Soit (E,g) un espace vectoriel euclidien. Soient $x,y \in E$. Supposons que $x = \sum_i x^i e_i$ et $y = \sum_i y^i e_i$. On a : $g(x,y) = \sum_{i,j} x^i y^j g(e_i,e_j)$.*

La preuve est une conséquence de la linéarité du produit scalaire. Abbrégeons $g(e_i,e_j)$ par g_{ij}. D'après la propriété ci-dessus, le produit scalaire $g(x,y)$ est déterminé par la suite des g_{ij} (ou par la matrice qui représente cette suite).

Définition 10 (Application inversible) *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $e_{i(0\leq i<n)}$ une base de E. L'application $g : E^2 \to \mathbb{R}$ est* inversible relativement à cette base*, si et seulement si la matrice, représentant g dans cette base, est inversible. Soit G la matrice représentant g. Notons par g^{ij} l'élément de ligne i et de colonne j de la matrice* inverse *de G.*

Théorème 11 *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $g : E^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire et inversible relativement à une base de E. Alors g est inversible relativement à toute base de E.*

Preuve :

Soient $e_{i(0\leq i<n)}$ et $e'_{i(0\leq i<n)}$ deux bases de E. Ces deux bases sont reliées par la relation suivante

$$e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j \tag{1}$$

Soit G la matrice représentant g dans la base des e_i. Cette matrice est supposée inversible.

Soit $g'_{ij} = g(e'_i,e'_j)$ et soit G' la matrice d'élément de ligne i et colonne j, g'_{ij}, qui représente l'application g dans la base des e'_i. Montrons que G' est aussi inversible.

Puisque g est linéaire, d'après 1, on a

$$g'_{ij} = g(e'_i,e'_j) = \sum_{k,l} \lambda_i{}^k \lambda_j{}^l g(e_k,e_l) = \sum_{k,l} \lambda_i{}^k \lambda_j{}^l g_{kl} \tag{2}$$

Soit L la matrice représentant la suite des $\lambda_i{}^j$ et L^T la matrice transposée de L. Soit $\mu_i{}^j$ la suite représentée par L^T. Par définition de la transposée, on a $\lambda_j{}^l = \mu_l{}^j$. Donc d'après 2, on a

$$g'_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_i{}^k g_{kl} \mu_l{}^j$$

D'après l'expression du produit de matrices, nous avons $G' = LGL^T$.

Soit $H' = (L^T)^{-1} G^{-1} L^{-1}$. On a $H'G' = I$. Autrement dit G' est aussi inversible.

Par suite l'application g est inversible relativement à toute base de E.

□

Définition 12 (Produit scalaire inversible) *Soit E un espace vectoriel. L'application $g : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, si elle est linéaire, symétrique et inversible relativement à une base de l'espace vectoriel.*

Théorème 13 *Soit E un espace vectoriel. Les deux définitions 8 et 12 du produit scalaire sont équivalentes.*

Preuve :

1. Soit $g : E^2 \to \mathbb{R}$ un produit scalaire au sens 8 autrement dit g est une application linéaire, symétrique, non dégénérée. Soit $e_{i(0 \leq i < n)}$ une base de E. Montrons que g est inversible relativement à cette base.

   Considérons le système d'équations à n équations et n variables u^i suivant dont la j-ème équation est
   $$\sum_i g(e_i, e_j) u^i = 0 \tag{3}$$

   On sait, d'après l'article matrice inversible de Wikipedia, que g est inversible si et seulement si l'unique solution de ce système est celle dont toutes les variables sont nulles. Montrons donc que l'unique solution de ce système est celle dont tous les u^i sont nuls.

   Soit $u = \sum_i u^i e_i$. Puisque g est linéaire, on a $g(u, e_j) = \sum_i g(e_i, e_j) u^i$ et d'après les équations 3, il en résulte que pour tout j nous avons
   $$g(u, e_j) = 0 \tag{4}$$

   Soit $v \in E$. Il existe des v^i tels que $v = \sum_i v^i e_i$. Puisque g est linéaire et d'après 4, on a $g(u, v) = \sum_i g(u, e_i) v^i = 0$. Puisque pour tout v, $g(u, v) = 0$ et que g est *non dégénérée*, il en resulte que $u = 0$, autrement dit l'unique solution du système d'équations 3 est la solution dont toutes les variables u^i sont nulles, donc g est inversible relativement à la base des e_i.

2. Réciproquement, supposons que g est inversible relativement à la base des e_i et montrons que l'application g est non dégénérée. Soit $u \in E$. *Supposons* que pour tout $v \in E$, $g(u, v) = 0$ et montrons que $u = 0$.

De l'hypothèse ci-dessus, il résulte que pour tout j, $g(u,e^j)=0$. Il existe des u^i tels que $u=u^ie_i$. Par suite pour tout j, $\sum_i g(e_i,e_j)u^i=0$. Puisque g est inversible relativement à la base des e_i, le système de variables u^i et d'équations $\sum_i g(e_i,e_j)u^i=0$ a comme unique solution celle dont les variables sont nulles. Donc $u=0$.

□

Définition 14 *Dans la suite de ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension n et $g : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, $e_{i(0\leq i<n)}$ est une base de E, g_{ij} est l'élément de ligne i et de colonne j de la matrice G représentant g dans la base des e_i et g^{ij} est l'élément de ligne i et de colonne j de la matrice* inverse *de G. Par definition des g_{ij} et des g^{ij}, on a $\sum_k g_{ik}g^{kj}=\delta_i{}^j=\sum_k g^{ik}g_{kj}=\delta^i{}_j$*

Propriété 15 (Base contravariante) *Soit $e^i=\sum_j g^{ij}e_j$. Les e^i forment une base de E, qui est la base contravariante associée à la base covariante des e_i.*

Preuve : Puisque le nombre des e^i est n, la dimension de E, il suffit de montrer que c'est un ensemble libre d'éléments de E. Supposons qu'il y a des coefficients λ_i tels que $\sum_i \lambda_i e^i=0$. Nous montrons que ces coefficients sont nuls.

Remplaçons e^i par sa définition 15, nous avons $\sum_i \lambda_i(\sum_j g^{ij}e_j)=0$.

Par distributivité du produit sur la somme, il en résulte que $\sum_j(\sum_i \lambda_i g^{ij})e_j=0$.

Puisque les e_i sont une base de E, il en résulte que, pour tout j, $\sum_i \lambda_i g^{ij}=0$.

Donc pour tout k, $\sum_j(\sum_i \lambda_i g^{ij})g_{jk}=0$ et par distributivité $\sum_i \lambda_i(\sum_j g^{ij}g_{jk})=0$

D'après la définition 14 des g_{ij} et des g^{ij}, nous avons $\sum_j g^{ij}g_{jk}=\delta^i{}_k$, donc pour tout k, $\sum_i \lambda_i\delta^i{}_k=0$.

D'après le sens du symbole de Kronecker différent de 0 seulement quand $i=k$, il en résulte que tous les coefficients λ_k sont nuls.

□

Propriété 16 *Soit e^i, où $0\leq i<n$, la base contravariante associée à la base covariante des e_i. Nous avons*

$$g(e_i,e^j)=\delta_i{}^j \tag{5}$$

Preuve : Remplaçons e^j par sa définition 15. On a $g(e_i,e^j)=g(e_i,\sum_k g^{jk}e_k)$. Par linéarité de g, il en résulte que $g(e_i,e^j)=\sum_k g^{jk}g(e_i,e_k)$. Par symétrie de g et par définition des g_{ik}, on a $g(e_i,e^j)=\sum_k g_{ik}g^{kj}$. D'après la définition 14 , il en résulte que $g(e_i,e^j)=\delta_i{}^j$. □

Propriété 17 *Soit e^i, où $0 \leq i < n$, la base contravariante des e_i. Nous avons*

$$g(e^i, e^j) = g^{ij} \tag{6}$$

Preuve : Remplaçons e^i et e^j par leur définition 15. On a $g(e^i, e^j) = g(\sum_k g^{ik} e_k, \sum_k g^{jk} e_k)$. Par linéarité de g en chacun de ses arguments, il en résulte que $g(e^i, e^j) = \sum_{k,l} g^{ik} g^{jl} g(e_k, e_l)$. Par symétrie de g et définition de g_{kl}, on a $g(e^i, e^j) = \sum_{k,l} g^{ik} g^{jl} g_{lk} = \sum_k g^{ik} (\sum_l g^{jl} g_{lk})$. D'après la définition 14, on a $g(e^i, e^j) = \sum_k g^{ik} \delta^j{}_k$. Par définition du symbole de Kronecker, non nul seulement si $k = j$, il en résulte que $g(e^i, e^j) = g^{ij}$. □

Propriété 18 *Soit e^i, où $0 \leq i < n$, la base contravariante associée à la base covariante des e_i. Nous avons*

$$e_i = \sum_j g_{ij} e^j$$

Preuve : Dans l'expression $\sum_j g_{ij} e^j$, remplaçons e^j par sa définition.

$\sum_j g_{ij} e^j = \sum_j g_{ij} (\sum_k g^{jk} e_k)$

Par distributivité et commutativité, nous avons

$\sum_j g_{ij} e^j = \sum_k (\sum_j g_{ij} g^{jk}) e_k$

D'après 14, nous avons

$\sum_j g_{ij} e^j = \sum_k \delta_i{}^k e_k$

Et par définition du symbole de Kronecker $\sum_j g_{ij} e^j = e_i$. □

De la propriété ci-dessus et la propriété 17, il résulte que les bases e_i et e^i ont des propriétés analogues relativement au produit g obtenues en échangeant indices inférieurs et supérieurs. On peut résumer les relations entre ces deux bases par les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} g(e^i, e^j) &= g^{ij} \\ e^i &= \sum_j g^{ij} e_j \\ g(e_i, e_j) &= g_{ij} \\ e_i &= \sum_j g_{ij} e^j \end{aligned} \tag{7}$$

Définition 19 (Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur) *Nous avons défini les composantes contravariantes d'un vecteur $x \in E$ comme ses composantes notées x^i dans la base e_i où $x = \sum_i x^i e_i$. Les composantes* covariantes *de x sont ses composantes notées x_i dans la base des e^i où $x = \sum_i x_i e^i$.*

Dans le cas particulier où $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, ce qui est le cas connu sous le nom de base *orthonormée*, la matrice représentant g est la matrice identité, la base e_i et la base e^i sont identiques, les composantes contravariantes et covariantes sont identiques. La distinction entre les deux types de coordonnées n'a pas lieu d'être.

Des relations 7 nous déduisons des relations entre les deux types de coordonnées.

Propriété 20 *Soit e_i une base de E et e^i la base contravariante de e_i relativement au produit scalaire g. Soit $x \in E$ vérifiant $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i x_i e^i$. Nous avons*

$$\begin{aligned} x^i &= g(e^i, x) \\ x^i &= \sum_j g^{ij} x_j \\ x_i &= g(e_i, x) \\ x_i &= \sum_j g_{ij} x^j \end{aligned}$$

Preuve : Puisque $x = \sum_i x^i e_i$, on a $g(e^i, x) = g(e^i, \sum_j x^j e_j)$. Par linéarité de g, on a $g(e^i, x) = \sum_j x^j g(e^i, e_j)$. D'après la propriété 16, $g(e^i, e_j) = \delta^i{}_j$, et par suite $g(e^i, x) = x^i$.

Remplaçons x par $\sum_j x_j e^j$ dans $g(e^i, x)$. On a $g(e^i, x) = g(e^i, \sum_j x_j e^j)$. Par linéarité $g(e^i, x) = \sum_j x_j g(e^i, e^j)$ et par suite $x^i = \sum_j g^{ij} x_j$.

De façon analogue, en échangeant les indices hauts et bas, on obtient les deux dernières relations. $\square$

Exemple 21 (Métrique de Minkowski) *Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Soit $\eta : E^2 \to \mathbb{R}$ un produit scalaire définie sur la base $e_{i(0 \leq i < 4)}$ par $\eta(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, par $\eta(e_i, e_i) = 1$ si $1 \leq i < 4$ et $\eta(e_0, e_0) = -1$. Ce produit est la bien connue métrique de Minkowski. Dans cette métrique, d'après 20, $x_0 = \sum_j \eta_{0j} x^j$ donc $x_0 = \eta_{00} x^0$ et par suite $x_0 = -x^0$. De même $x_i = \sum_j \eta_{ij} x^j$ pour $i = 1, 2, 3$. Et par suite pour $i = 1, 2, 3$ on a $x_i = x^i$.*

Soit G la matrice représentant η. On vérifie sans peine que $GG = I$, autrement dit l'inverse de G est G, donc pour tous i, j, on a $\eta_{ij} = \eta^{ij}$. Cette matrice G est souvent dénotée par $diag(-1, +1, +1, +1)$, la matrice dont seule la diagonale n'est pas nulle et vaut de haut en bas, $-1, +1, +1, +1$.

Attention : *certains auteurs appellent métrique de Minkowski la métrique définie par la matrice $diag(+1, -1, -1, -1)$. Ce choix est arbitraire, mais il est important de le préciser.*

Nous regardons comment les coordonnées covariantes sont transformées dans les changements de bases de la base e_i vers la base e'_i et inversement.

Propriété 22 *Soit E avec deux bases e_i et e'_i telles que $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$. Soit $x \in E$ de composantes covariantes x_i dans la base e_i et de composantes covariantes x'_i dans la base e'_i. Nous avons $x'_i = \sum_j \lambda_i{}^j x_j$ et $x_i = \sum_j \mu_i{}^j x'_j$.*

Preuve : D'après 20, $x'_i = g(e'_i, x)$. En remplaçant e'_i par $\sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et en utilisant la linéarité de g, on obtient $x'_i = \sum_j \lambda_i{}^j g(e_j, x)$. D'après la propriété 20, il en résulte que $x'_i = \sum_j \lambda_i{}^j x_j$. On prouve de façon analogue que $x_i = \sum_j \mu_i{}^j x'_j$. □

On observe, dans la propriété ci-dessus, que les composantes covariantes x_i, dans une base donnée e_i, sont transformées comme le sont les vecteurs e_i de la base covariante. C'est l'origine du mot covariante, et par opposition, du mot contravariante.

Propriété 23 *Soit E avec deux bases e_i et e'_i telles que $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$. Soit $g : E^2 \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soit e^i la base contravariante de e_i et e'^i la base contravariante de e'_i relativement au produit scalaire g.*

Nous avons $e^i = \sum_j \lambda_j{}^i e'^j$ et $e'^i = \sum_j \mu_j{}^i e^j$.

Preuve : Supposons $e^i = \sum_j \nu_j{}^i e'^j$. On montre que $\nu_j{}^i = \lambda_j{}^i$.

Soit $x \in E$ où $x = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. D'après 20, $g(e^i, x) = x^i$ et $g(e'^i, x) = x'^i$.

Par linéarité de g, $x^i = g(e^i, x) = \sum_j \nu_j{}^i g(e'^j, x) = \sum_j \nu_j{}^i x'^j$ donc $x^i = \sum_j \nu_j{}^i x'^j$.

D'après la propriété 7, $e'_i = \sum_j \nu_i{}^j e_j$. Puisque par hypothèse $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et par unicité de la décomposition dans les bases, il en résulte que $\nu_j{}^i = \lambda_j{}^i$ donc que $e^i = \sum_j \lambda_j{}^i e'^j$.

Puisque la transformation des e'^i en e^j est l'inverse de celles des e^i en e'^j, et que les $\mu_j{}^i$ sont les inverses des $\lambda_j{}^i$, il en résulte que $e'^i = \sum_j \mu_j{}^i e^j$.

□

Nous avons vu, via la propriété 22, que, dans une transformation de la base e_i vers la base e'_i, les coordonnées covariantes d'un vecteur étaient transformées comme les bases. En rapprochant la propriété ci-dessus de la propriété 7, on observera ci-dessous que les coordonnées contravariantes d'un vecteur sont transformées comme la base contravariante e^i est transformée en la base contravariante e'^i.

Propriété 24 *Soit E avec deux bases e_i et e'_i telles que $e'_i = \sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et $e_i = \sum_j \mu_i{}^j e'_j$. Soit g un produit scalaire. Soit e^i la base contravariante de e_i relativement à g, et e'^i la base contravariante de e'_i relativement à g. Soit $x \in E$ tel que $x = x^i e_i = x'^i e'_i$. Nous avons*

$$e^i = \sum_j \lambda_j{}^i e'^j \qquad e'^i = \sum_j \mu_j{}^i e^j \tag{8}$$

$$x^i = \sum_j \lambda_j{}^i x'^j \qquad x'^i = \sum_j \mu_j{}^i x^j \tag{9}$$

Preuve : La propriété 9 est un rappel de la propriété 7. La propriété 8 est un rappel de la propriété 23 □

On observe que les quantités contravariantes e^i et x^i sont transformées de la même manière lors du changement de base de e_i à e'_i.

1.3 Exemple de bases covariantes et contravariantes associées

Dans cet exemple, le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté, comme il est usuel, par $x \cdot y$. On montre les relations entre une base covariante et sa base contravariante associée sur l'exemple de la figure ci-dessous.

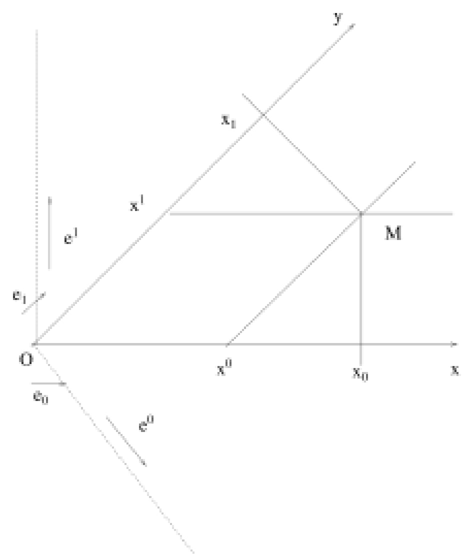

FIGURE 1 – Bases duales

Sur la figure, on voit les vecteurs e_0 et e_1 de norme 1 qui font entre eux un angle de $\pi/4$. Avec le produit scalaire usuel, on a :
$e_0 \cdot e_0 = e_1 \cdot e_1 = 1, e_0 \cdot e_1 = e_1 \cdot e_0 = \sqrt{2}/2$.
Avec les abréviations usuelles, et la convention 3, la matrice des g_{ij} est :

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse des g^{ij} est

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

On rappelle que $e_i \cdot e^j = \delta_{ij}$. Donc e_0 et e^1 (respectivement e_1 et e^0) sont orthogonaux, comme on peut le voir sur la figure.

Par définition de la base duale, on a : $e^0 = g^{00}e_0 + g^{01}e_1 = 2e_0 + (-\sqrt{2})e_1$.
De même $e^1 = g^{10}e_0 + g^{11}e_1 = (-\sqrt{2})e_0 + 2e_1$.
Calculons la norme de e^0 qui est égale à celle de e^1.
$e^0 \cdot e^0 = (2e_0 + (-\sqrt{2})e_1) \cdot (2e_0 + (-\sqrt{2})e_1)$
$e^0 \cdot e^0 = 4(e_0 \cdot e_0) + 4(-\sqrt{2})(e_0 \cdot e_1) + 2(e_1 \cdot e_1)$
$e^0 \cdot e^0 = 4 + 4(-\sqrt{2})(\sqrt{2}/2) + 2 = 2$
La norme de e^0 comme celle de e^1 est donc de 2. Sa longueur est $\sqrt{2}$.

Les coordonnées contravariantes de M dans la base e_0, e_1 sont x^0, x^1.

Les coordonnées covariantes de M dans la base e^0, e^1 sont x_0, x_1. Puisque $x_0 = x \cdot e_0$ et que le produit scalaire est le produit scalaire usuel de la géométrie élémentaire, lorsque $x = \overrightarrow{OM}$, x_0 est la longueur de la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Ox, orienté suivant e_0, et x_1 est la longueur de la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oy, orientée suivant e_1.

2 Tenseurs

Dans cette section (E, g) est un espace vectoriel euclidien, autrement dit E est un espace vectoriel et $g : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire. C'est Lichnérowicz, dans [10] qui a défini la notion d'espace vectoriel euclidien

Définition 25 (Tenseur) *Un tenseur sur E est une application linéaire de E^p dans $\mathbb{R}$. Le nombre p d'arguments du tenseur est appelé l'ordre du tenseur.*

L'ensemble des tenseurs sur E d'ordre p est désigné par $L(E^p \to K)$ où la lettre L souligne que les tenseurs sont linéaires en chacun de leurs p arguments.

Le produit scalaire g est un tenseur, car il est linéaire en chacun de ses deux arguments. On voit qu'un tenseur est un objet mathématique très simple, contrairement à ce que l'on voit dans de trop nombreux livres et qu'il est défini indépendamment de toute base de E. Autant qu'il est possible, nous présenterons les opérations sur les tenseurs pour des ordres au plus égaux à 5, pour éviter des notations compliquées.

2.1 Produit tensoriel et espace vectoriel des tenseurs

Définition 26 (Produit tensoriel) *Soient $s : L(E^2 \to \mathbb{R})$ un tenseur à deux arguments et $t : L(E \to \mathbb{R})$ un tenseur à un argument. Le produit de ces deux tenseurs noté $s \otimes t$ est un tenseur sur E à trois arguments défini par :*
pour tout $x, y, z \in E, (s \otimes t)(x, y, z) = s(x, y)t(z)$

Il est évident que le produit de deux tenseurs, qui sont linéaires en chacun de leur argument, est linéaire en chacun de ses arguments, donc est aussi un tenseur.

Propriété 27 *Le produit tensoriel est associatif.*

Preuve : Soient $r : L(E^2 \to \mathbb{R}), s : L(E \to \mathbb{R}), t : L(E^3 \to \mathbb{R})$ trois tenseurs. Montrons que $r \otimes (s \otimes t) = (r \otimes s) \otimes t$. Soient $u, v, w, x, y, z \in E$.

$$(r \otimes (s \otimes t))(x, y, z, u, v, w) \quad = r(x, y)(s \otimes t)(z, u, v, w) \tag{10}$$
$$= r(x, y)s(z)t(u, v, w) \tag{11}$$
$$= (r \otimes s)(x, y, z)t(u, v, w) \quad = ((r \otimes s) \otimes t)(x, y, z, u, v, w) \tag{12}$$

Par suite $r \otimes (s \otimes t) = (r \otimes s) \otimes t$. Au détriment de notations plus lourdes, le lecteur peut généraliser cette preuve au cas de tenseurs d'ordre quelconque. $\square$

Définition 28 (Espace vectoriel de tenseurs de même ordre) *Soient $s : L(E^2 \to \mathbb{R})$ et $t : L(E^2 \to \mathbb{R})$ deux tenseurs d'ordre 2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(s+t)$ est le tenseur défini par pour tout $x, y \in E, (s+t)(x,y) = s(x,y) + t(x,y)$. λs est le tenseur défini pas pour tout $x, y \in E, (\lambda s)(x,y) = \lambda(s(x,y))$. Il est évident que l'ensemble des tenseurs sur E d'ordre 2, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel.*

Propriété 29 (Linéarité du produit tensoriel) *Le produit tensoriel est linéaire en chacun de ses arguments.*

Preuve : Pour éviter de compliquer la preuve, on fait la preuve pour le cas représentatif des tenseurs d'ordre 2 et 3. Soit s un tenseur d'ordre 3 et t, u deux tenseurs d'ordre 2.

Montrons que

$$s \otimes (t+u) = s \otimes t + s \otimes u \tag{13}$$

Soient $v, w, x, y, z \in E$ cinq vecteurs. Par définition du produit tensoriel

$$(s \otimes (t+u))(v,w,x,y,z) = s(v,w,x)(t+u)(y,z)$$

Par définition de la somme de deux tenseurs du *même* ordre

$$s(v,w,x)(t+u)(y,z) = s(v,w,x)(t(y,z) + s(y,z))$$

où la somme est entre deux éléments de K. Puisque K est un corps, on a

$$s(v,w,x)(t(y,z) + s(y,z)) = (s(v,w,x)t(y,z)) + (s(v,w,x)u(y,z)$$

Par définition de la somme et du produit tensoriel, nous avons

$$(s(v,w,x)t(y,z)) + (s(v,w,x)u(y,z) = ((s \otimes t) + (s \otimes u))(v,w,x,y,z)$$

Des égalités ci-dessus, il en résulte que pour tous $v, w, x, y, z \in E$, on a

$$(s \otimes (t+u))(v,w,x,y,z) = ((s \otimes t) + (s \otimes u))(v,w,x,y,z)$$

Par suite $s \otimes (t+u) = s \otimes t + s \otimes u$.

Avec une preuve analogue, on montre que

$$s \otimes (\lambda t) = \lambda (s \otimes t) \tag{14}$$

ce qui termine de prouver, d'après 13 et 14, que le produit tensoriel est linéaire à droite. On prouve de même que le produit tensoriel est linéaire à gauche. $\square$

2.2 Bases de l'ensemble des tenseurs de même ordre

Nous allons voir comment définir des bases de l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 sur l'espace vectoriel E . Le lecteur pourra sans difficulté généraliser ce cas à un ordre quelconque. Un vecteur de E n'est pas un tenseur mais on peut lui associer un tenseur à un argument (autrement dit une forme linéaire) dépendant du produit scalaire g.

Définition 30 (Tenseur associé à un vecteur) *Soit $L(E \to \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Soit $I : E \to L(E \to \mathbb{R})$ l'application définie pour tout $x, y \in E$ par $I(x)(y) = g(x, y)$. $I(x)$ est tenseur à un argument associé à x, par le produit scalaire g.*

Théorème 31 (Bases de l'espace vectoriel des tenseurs sur E d'ordre 2) *Soit $e_{i(0 \le i < n)}$ une base de E et $e^{i(0 \le i < n)}$ sa base contravariante associée relativement au produit scalaire g. L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 est de dimension n^2. Soit $t : L(E^2 \to \mathbb{R})$ un tenseur d'ordre 2. Cet espace vectoriel peut être rapporté aux quatre bases suivantes et t est exprimé ainsi dans ces bases où implicitement $0 \le i < n, 0 \le j < n$:*

1. *$I(e_i) \otimes I(e_j)$ est une base et dans cette base $t = \sum_{i,j} t(e^i, e^j)(I(e_i) \otimes I(e_j))$.*
2. *$I(e_i) \otimes I(e^j)$ est une base et dans cette base $t = \sum_{i,j} t(e^i, e_j)(I(e_i) \otimes I(e^j))$.*
3. *$I(e^i) \otimes I(e^j)$ est une base et dans cette base $t = \sum_{i,j} t(e_i, e_j)(I(e^i) \otimes I(e^j))$.*
4. *$I(e^i) \otimes I(e_j)$ est une base et dans cette base $t = \sum_{i,j} t(e_i, e^j)(I(e^i) \otimes I(e_j))$.*

Preuve : Nous ne faisons la preuve que dans le deuxième cas, les autres cas étant analogues. Nous montrons que la base $I(e_i) \otimes I(e^j)$ engendre les tenseurs puis qu'elle est libre.

Soit t un tenseur. Soient $x, y \in E$. Puisque, d'après la propriété 15, e^i et e_i sont deux bases de E, il existe des coordonnées covariantes de x, x_i et des coordonnées contravariantes y^i de y telles que $x = x_i e^i$ et $y = y^i e_i$.

Par linéarité du tenseur t,

$$t(x, y) = \sum_{i,j} t(e^i, e_j) x_i y^j \tag{15}$$

Par définition du produit tensoriel

$$(I(e_i) \otimes I(e^j))(x, y) = I(e_i)(x) I(e^j)(y) \tag{16}$$

D'après la définition 30 de l'application I

$$I(e_i)(x) I(e^j)(y) = g(e_i, x) g(e^j, y) \tag{17}$$

D'après la propriété 20,

$$g(e_i, x) g(e^j, y) = x_i y^j \tag{18}$$

D'après les propriétés 16, 17,18, nous avons

$$(I(e_i) \otimes I(e^j))(x,y) = x_i y^j \tag{19}$$

Reportons cette égalité dans 15 il en résulte que

$$t(x,y) = \sum_{i,j} t(e^i, e_j)(I(e_i) \otimes I(e^j))(x,y) \tag{20}$$

Par définition de l'espace vectoriel des tenseurs 28, on conclut que

$$t = \sum_{i,j} t(e^i, e_j)(I(e_i) \otimes I(e^j)) \tag{21}$$

Par suite l'ensemble des tenseurs $I(e_i) \otimes I(e^j)$ engendre les tenseurs d'ordre 2.

Il reste à montrer que cet ensemble est libre. On montre que l'unique combinaison de ces tenseurs engendrant le tenseur nul est la combinaison nulle.

Soit $\lambda^i{}_j$ des éléments de K tels que

$$\sum_{i,j} \lambda^i{}_j (I(e_i) \otimes I(e^j)) = 0 \tag{22}$$

Par définition du produit tensoriel, pour tous entiers i, j, k, l nous avons

$$(I(e_i) \otimes I(e^j))(e^k, e_l) = I(e_i)(e^k) I(e^j)(e_l) \tag{23}$$

Par définition de l'application I, nous avons

$$I(e_i)(e^k) I(e^j)(e_l) = g(e_i, e^k) g(e^j, e_l) \tag{24}$$

De la relation 16 entre une base variante et sa base contravariante pour g, et des trois précédentes relations, il résulte que pour tous entiers i, j, k, l

$$(I(e_i) \otimes I(e^j))(e^k, e_l) = \delta_i{}^k \delta^j{}_l \tag{25}$$

Autrement dit la quantité à gauche de l'égalité n'est pas nulle si et seulement si $i = k$ et $j = l$.

D'après 22, pour tous entiers k, l on a

$$\left(\sum_{i,j} \lambda^i{}_j (I(e_i) \otimes I(e^j))\right)(e^k, e_l) = 0 \tag{26}$$

Par définition de l'espace vectoriel des tenseurs, de l'égalité précédente, on déduit que pour tous entiers k, l, on a

$$\sum_{i,j} \lambda^i{}_j ((I(e_i) \otimes I(e^j))(e^k, e_l)) = 0 \tag{27}$$

Puisque, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, la quantité $(I(e_i) \otimes I(e^j))(e^k, e_l)$ n'est pas nulle si et seulement si $i = k$ et $j = l$. Il résulte de l'équation ci-dessus que pour tous entiers k,l, le coefficient $\lambda^k{}_l$ est nul. Donc la seule combinaison des tenseurs $I(e_i)\otimes I(e^j)$, engendrant le tenseur nul, est la combinaison nulle.

Par suite l'ensemble des n^2 tenseurs $I(e_i)\otimes I(e^j)$ est une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2. □

Il est fréquent d'abréger $t(e^i,e^j)$ en t^{ij}, $t(e^i,e_j)$ en $t^i{}_j$, $t(e_i,e_j)$ en t_{ij}, $t(e_i,e^j)$ en $t_i{}^j$.

On définit aussi les abréviations suivantes pour désigner les quatre bases ci-dessus :

1. $I(e_i)\otimes I(e_j)$ est abrégé en π_{ij}
2. $I(e_i)\otimes I(e^j)$ est abrégé en $\pi_i{}^j$
3. $I(e^i)\otimes I(e^j)$ est abrégé en π^{ij}
4. $I(e^i)\otimes I(e_j)$ est abrégé en $\pi^i{}_j$

Avec ces abréviations, nous avons : $t = \sum\limits_{i,j} t^{ij}\pi_{ij} = \sum\limits_{i,j} t^i{}_j\pi_i{}^j = \sum\limits_{i,j} t_{ij}\pi^{ij} = \sum\limits_{i,j} t_i{}^j\pi^i{}_j$

Corollaire 32 *Soit a^{ij} une suite quelconque de réels (où $0\leq i<n$ et $0\leq j<n$) . Soit $t=\sum\limits_{ij} a^{ij}\pi_{ij}$. t est un tenseur d'ordre 2 sur E, c'est-à-dire un élément de $L(E^2\to\mathbb{R})$, qui vérifie pour tous i, j, $t(e^i,e^j)=a^{ij}$.*

Preuve : D'après le théorème 31 les π_{ij} sont une base de $L(E^2\to\mathbb{R})$. Donc t, qui est une combinaison linéaire des tenseurs de cette base, est un tenseur d'ordre 2. D'après ce théorème, $t=\sum\limits_{ij} t(e^i,e^j)\pi_{ij}$. Puisque les π_{ij} sont une base des tenseurs d'ordre 2, les coordonnées de t dans cette base sont uniques, donc $t(e^i,e^j)=a^{ij}$. □

Pour voir comme se généralise le théorème 31 au cas d'un autre ordre, considérons le cas des tenseurs d'ordre 3. Le lecteur qui aime les indices, les indices d'indices, voir les indices d'indices d'indices pourra trouver le cas général chez [10].

Théorème 33 (Bases de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 3) *Soit $e_{i(0\leq i<n)}$ une base de E et $e^{i(0\leq i<n)}$ la base contravariante relativement au produit scalaire g. L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 3 est de dimension n^3. Soit $t : L(E^3\to\mathbb{R})$ un tenseur. Comme pour le cas de l'ordre 2, on utilise les huit abréviations suivantes $t(e^i,e^j,e^k)=t^{ijk}, t(e^i,e^j,e_k)=t^{ij}{}_k, t(e^i,e_j,e^k)=t^i{}_j{}^k, t(e^i,e_j,e_k)=t^i{}_{jk}, t(e_i,e^j,e^k)=t_i{}^{jk}, t(e_i,e^j,e_k)=t_i{}^j{}_k, t(e_i,e_j,e^k)=t_{ij}{}^k, t(e_i,e_j,e_k)=t_{ijk}$.*

Cet espace vectoriel peut être rapporté aux huit bases suivantes et t est exprimé ainsi dans ces bases où implicitement $0\leq i<n, 0\leq j<n, 0\leq k<n$

1. *$I(e_i)\otimes I(e_j)\otimes I(e_k)$ est une base. Abrégeons $I(e_i)\otimes I(e_j)\otimes I(e_k)$ en π_{ijk}. Dans cette base $t=\sum\limits_{i,j,k} t^{ijk}\pi_{ijk}$.*
2. *$I(e_i)\otimes I(e_j)\otimes I(e^k)$ est une base. Abrégeons $I(e_i)\otimes I(e_j)\otimes I(e^k)$ en $\pi_{ij}{}^k$. Dans cette base $t=\sum\limits_{i,j,k} t^{ij}{}_k\pi_{ij}{}^k$.*
3. *$I(e_i)\otimes I(e^j)\otimes I(e_k)$ est une base. Abrégeons $I(e_i)\otimes I(e^j)\otimes I(e_k)$ en $\pi_i{}^j{}_k$. Dans cette base $t=\sum\limits_{i,j,k} t^i{}_j{}^k\pi_i{}^j{}_k$.*

4. *$I(e_i)\otimes I(e^j)\otimes I(e^k)$ est une base. Abrégeons $I(e_i)\otimes I(e^j)\otimes I(e^k)$ en $\pi_i{}^{jk}$. Dans cette base $t = \sum_{i,j,k} t^i{}_{jk}\pi_i{}^{jk}$.*
5. *$I(e^i)\otimes I(e_j)\otimes I(e_k)$ est une base. Abrégeons $I(e^i)\otimes I(e_j)\otimes I(e_k)$ en $\pi^i{}_{jk}$. Dans cette base $t = \sum_{i,j,k} t_i{}^{jk}\pi^i{}_{jk}$.*
6. *$I(e^i)\otimes I(e_j)\otimes I(e^k)$ est une base. Abrégeons $I(e^i)\otimes I(e_j)\otimes I(e^k)$ en $\pi^i{}_j{}^k$. Dans cette base $t = \sum_{i,j,k} t_i{}^j{}_k\pi^i{}_j{}^k$.*
7. *$I(e^i)\otimes I(e^j)\otimes I(e_k)$ est une base. Abrégeons $I(e^i)\otimes I(e^j)\otimes I(e_k)$ en $\pi^{ij}{}_k$. Dans cette base $t = \sum_{i,j,k} t_{ij}{}^k\pi^{ij}{}_k$.*
8. *$I(e^i)\otimes I(e^j)\otimes I(e^k)$ est une base. Abrégeons $I(e^i)\otimes I(e^j)\otimes I(e^k)$ en π^{ijk}. Dans cette base $t = \sum_{i,j,k} t_{ijk}\pi^{ijk}$.*

On ne fait pas la preuve de ce théorème, car elle est totalement analogue à celle du cas des tenseurs d'ordre 2. Il est fréquent d'abréger les coordonnées d'un tenseur, par exemple la coordonnée $t(e_i,e^j,e_k)$ est abrégée en $t_i{}^j{}_k$. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons décidé de ne pas superposer un indice inférieur et supérieur. Dans la suite, on utilise *presque toujours* ces abréviations.

Ci-dessous, on généralise à l'ordre 3 le corollaire 32.

Corollaire 34 *Soit $a^{ij}{}_k$ une suite quelconque de réels . Soit $t = \sum_{ijk} a^{ij}{}_k\pi_{ij}{}^k$. t est un tenseur d'ordre 3 sur E, c'est-à-dire un élément de $L(E^3 \to \mathbb{R})$, qui vérifie pour tous i, j, $t(e^i,e^j,e_k) = a^{ij}{}_k$.*

Remarque 35 *Dans la majorité des livres parlant de calcul tensoriel, on confond ce qu'est un tenseur et ce que sont ses composantes dans une base. Par exemple on parle du tenseur $t_i{}^j$ qu'on dit abusivement une fois covariant et une fois contravariant au lieu de dire qu'on parle des coordonnées $t_i{}^j$ d'un tenseur t dans la base $I(e^i)\otimes I(e_j)$.*

Dans la majorité des livres parlant de calcul tensoriel, on ne fait pas la distinction entre le vecteur $x\in E$ et le tenseur à un argument $I(x) : L(E\to\mathbb{R})$ qui lui est associé. Cette confusion me semble regrettable.

Nous généralisons le théorème 31 à des tenseurs avec un nombre quelconque d'arguments. On ne fera pas la preuve de cette généralisation, car les arguments de la preuve sont pour l'essentiel analogues, mais bien plus complexes, à ceux du théorème généralisé.

Théorème 36 *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Soit g le produit scalaire de cet espace. Soit $e_{i(0\le i<n)}$ une base de E et $e^{i(0\le i<n)}$ la base contravariante relativement au produit scalaire g.*

Soit u une suite de 0 et de 1 de longueur p. Soit l une suite d'entiers i où $0 \leq i < n$ de longueur p. Par récurrence sur p, on définit v_u^l un produit tensoriel des $I(e_i)$ et $I(e^i)$.

$$
\begin{aligned}
v_0^i &= I(e_i)\\
v_1^i &= I(e^i)\\
v_{u0}^{li} &= v_u^l \otimes v_0^i\\
v_{u1}^{li} &= v_u^l \otimes v_1^i
\end{aligned}
$$

Soit $B_u = \{v_u^l \mid l$ suite de p entiers entre 0 et $n-1$(bornes comprises)$\}$. B_u est une base de l'espace vectoriel $L(E^p \to \mathbb{R})$ des tenseurs sur E à p arguments. La dimension de cet espace est n^p.

Par récurrence sur p, on définit c_u^l une suite *des éléments e_i et e^i, la virgule servant de séparateur entre les éléments de la suite.*

$$
\begin{aligned}
c_0^i &= e^i\\
c_1^i &= e_i\\
c_{u0}^{li} &= c_u^l, c_0^i\\
c_{u1}^{li} &= c_u^l, c_1^i
\end{aligned}
$$

Soit $t \in L(E^p \to \mathbb{R})$ un tenseur à p arguments.

On a $t = \sum_l t(c_u^l) v_u^l$ où les l sont des suites de p entiers entre 0 et $n-1$ (bornes comprises). Autrement dit $t(c_u^l)$ est la coordonnée de t sur le vecteur de base v_u^l.

2.3 Élévation et abaissement d'indice

Soit E un espace vectoriel, soit $e_{i(0 \leq i < n)}$ une base covariante de E et $e^{i(0 \leq i < n)}$ sa base contravariante relativement au produit scalaire g.

Soit t un tenseur sur E d'ordre 2. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, il y a quatre bases des tenseurs d'ordre 2, la base des π^{ij}, celle des $\pi^i{}_j$, celle des $\pi_i{}^j$, celle des π_{ij}. Nous montrons comment transformer les coordonnées du tenseur entre chacune de ces bases.

2.3.1 Élevation d'indice

Supposons connues les coordonnées $t^i{}_j$ du tenseur t (sous-entendu dans la base $\pi_i{}^j$). Nous voulons calculer les coordonnées t^{ij} (sous-entendu dans la base π_{ij}) de ce tenseur. Cette transformation de coordonnées est appelée l'élévation de l'indice j.

$$
\begin{aligned}
t^{ij} &= t(e^i, e^j) \text{ par définition des abréviations}\\
&= t(e^i, \sum_k g^{jk} e_k) \text{ par définition de la base contravariante}\\
&= \sum_k g^{jk} t^i{}_k \text{ par linéarité de } t \text{ et définition des abréviations}
\end{aligned}
$$

Il nous arrivera d'écrire t^{ij} sous la forme $t^i(e^j)$ lorsque, comme ci-dessus, nous voulons mettre en évidence la transformation de l'indice j.

Par deux élévations successives d'indices, on exprime les coordonnées t^{ij} en fonction des coordonnées t_{ij}.

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \sum_k g^{ik} t_k{}^j \text{ par élévation de } i \\ &= \sum_{kl} g^{ik} g^{jl} t_{kl} \text{ par élévation de } j \end{aligned}$$

2.3.2 Abaissement d'indice

Supposons connues les coordonnées t^{ij} du tenseur t. Nous voulons calculer les coordonnées $t^i{}_j$ de ce tenseur. Cette transformation est appelée l'abaissement de l'indice j.

$$\begin{aligned} t^i{}_j &= t^i(e_j) \text{l'indice } j \text{ est une abréviation de } e_j \\ &= t^i(\sum_k g_{jk} e^k) \text{ d'après la propriété 18} \\ &= \sum_k g_{jk} t^{ik} \text{ par linéarité du tenseur} \end{aligned}$$

Ces transformations de coordonnées se généralisent à des tenseurs de tous ordres. Soit maintenant t un tenseur d'ordre 4, dont on suppose connues les coordonnées $t^i{}_{jkl}$ dans la base $\pi_i{}^{jkl}$. Nous voulons *élever* l'indice k, autrement dit calculer les coordonnées $t^i{}_j{}^k{}_l$ en fonction des coordonnées connues.

$$\begin{aligned} t^i{}_j{}^k{}_l &= t^i{}_j(e^k)_l \\ &= t^i{}_j(\sum_m g^{mk} e_m)_l \text{ par définition de la base contravariante} \\ &= \sum_m g^{km} t^i{}_{jml} \text{ par linéarité du tenseur} \end{aligned}$$

Exemple 37 (Tenseurs et métrique de Minkowski) *Soit E un espace vectoriel de dimension 4, $\eta : E^2 \to \mathbb{R}$ la métrique de Minkowski définie précédemment en 21. Soit $t : E^2 \to \mathbb{R}$ un tenseur. On indique les relations entre t_{ij} et t^{ij} les coordonnées de t dans les bases covariantes et contravariantes relatives à cette métrique. Par élévation des indices i et j, on a $t^{ij} = \sum_{k,l} \eta^{ik}\eta^{jl} t_{kl}$. Puisque η^{ij} est nul lorsque i et j sont distincts, on a $t^{ij} = \eta^{ii}\eta^{jj} t_{ij}$. Puisque $\eta^{00} = -1$ et si $i \neq 0$ alors $\eta^{ii} = 1$, on a*

- *$t^{00} = t_{00}$*
- *si $i, j \neq 0$ alors $t^{ij} = t_{ij}$*
- *si $i \neq 0$ alors $t^{0i} = -t_{0i}$ et $t^{i0} = -t_{i0}$*

Appliquons cette transformation à la métrique η elle même. Des égalités ci-dessus, on déduit $\eta^{ij} = \eta_{ij}$ ce qu'on avait déjà montré en 21.

2.4 Changement des bases des tenseurs quand change la base des vecteurs

Soient $e_{i(0\leq i<n)}$ et $e'_{j(0\leq j<n}$ deux bases de E telles que

$$\begin{aligned} e'_i &= \sum_j \lambda_i{}^j e_j \\ e_i &= \sum_j \mu_i{}^j e'_j \end{aligned}$$

Soit L la matrice représentant les $\lambda_i{}^j$ et M la matrice représentant les $\mu_i{}^j$. On rappelle que ces deux matrices sont les inverses l'une de l'autre. On rappelle que, d'après la propriété 24

$$\begin{aligned} e'^i &= \sum_j \mu_j{}^i e^j \\ e^i &= \sum_j \lambda_j{}^i e'^j \end{aligned}$$

Attention : la matrice de passage de la base des e_i vers la base des e'_i, n'est pas L mais la transposée de L.

Soit $t : L(E^2 \to \mathbb{R})$ un tenseur d'ordre 2. Soit t^{ij} les coordonnées de t dans la base π_{ij} et t'^{ij} les coordonnées de t dans la base π'_{ij}. La notation de ces bases a été définie au paragraphe 2.2. On montre comment t'^{ij} s'exprime en fonction des t^{kl}.

$$\begin{aligned} t'^{ij} &= t(e'^i, e'^j) \text{par définition des abréviations} \\ t(e'^i, e'^j) &= t(\sum_k \mu_k{}^i e^k, \sum_l \mu_l{}^j e^l) \text{d'après l'expression ci-dessus de } e'^i \text{et } e'^j \\ t(\sum_k \mu_k{}^i e^k, \sum_l \mu_l{}^j e^l) &= \sum_{kl} \mu_k{}^i \mu_l{}^j t(e^k, e^l) \text{par linéarité de } t \\ t'^{ij} &= \sum_{kl} \mu_k{}^i \mu_l{}^j t^{kl} \text{par définition des abréviations} \end{aligned}$$

Il suffit d'échanger λ et μ pour obtenir l'expression de t^{ij} en fonction des t'^{kl} : $t^{ij} = \sum_{kl} \lambda_k{}^i \lambda_l{}^j t'^{kl}$.

Traduisons matriciellement ces propriétés. Soit T la matrice représentant les t^{ij} et T' celle représentant les t'^{ij}.

Le fait que pour tous i, j, $t'^{ij} = \sum_{kl} \mu_k{}^i \mu_l{}^j t^{kl}$ est traduit par $T' = (L^{-1})^T T (L^{-1})$.

Le fait que pour tous i, j, $t^{ij} = \sum_{kl} \lambda_k{}^i \lambda_l{}^j t'^{kl}$ est traduit par $T = L^T T' L$.

La même méthode nous permet d'obtenir pour $t : L(E^3 \to \mathbb{R})$ les coordonnées $t'^i{}_j{}^k$ (où $t'^i{}_j{}^k$ abrège $t(e'^i, e'_j, e'^k)$) en fonction des $t^l{}_m{}^n$. En remplaçant e'_i par $\sum_j \lambda_i{}^j e_j$ et e'^i par $\sum_j \mu_j{}^i e^j$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} t'^{i}{}_{j}{}^{k} &= t(\sum_l \mu_l{}^i e^l, \sum_m \lambda_j{}^m e_m, \sum_n \mu_n{}^k e^n) \\ &= \sum_{l,m,n} \mu_l{}^i \lambda_j{}^m \mu_n{}^k t^l{}_m{}^n \end{aligned}$$

2.5 Contraction tensorielle

Nous présentons l'opération de contraction sur des tenseurs d'ordre 3 puis 5, en laissant au lecteur la tache de généraliser cette opération aux tenseurs de tout ordre.

Soit $t : L(E^3 \to K)$ un tenseur d'ordre 3 donné par ses coordonnées $t_{ij}{}^k$ dans la base $\pi^{ij}{}_k$. On rappelle que E est rapporté à la base des e_i et que la base des e^i est la base contravariante associée à la base des e_i. On rappelle que $I : L(E \to K)$ est défini, pour $x \in E$, par $I(x)(y) = g(x,y)$, d'où résulte que pour tous i, j, $I(e_i)(e^j) = I(e^i)(e_j) = \delta_{ij}$.

Soit t un tenseur d'ordre 3 donné par ses coordonnées $t_{ij}{}^k$ dans la base des $\pi^{ij}{}_k$. On rappelle que $\pi^{ij}{}_k = I(e^i) \otimes I(e^j) \otimes I(e_k)$.

On peut contracter les coordonnées $t_{ij}{}^k$ en contractant deux des indices des coordonnées de variance opposée, soit i et k, soit j et k.

La contraction sur i et k des $t_{ij}{}^k$ donne les coordonnées $u_j = \sum_i t_{ij}{}^i$. Appelons u le tenseur dont les coordonnées sont u_j sur la base $I(e^j)$.

La contraction de j et k des $t_{ij}{}^k$ donne les coordonnées $v_i = \sum_j t_{ij}{}^j$. Appelons v le tenseur dont les coordonnées sont v_i sur la base $I(e^i)$.

On montre que pour tout $x \in E$, $u(x) = \sum_i t(e_i, x, e^i)$.

D'après la définition de t et des bases des tenseurs, $t = \sum_{ijk} t_{ij}{}^k I(e^i) \otimes I(e^j) \otimes I(e_k)$.

D'après la définition des opérations sur les tenseurs, il en résulte que pour tout $x \in E$, $t(e_l, x, e^l) = \sum_{ijk} t_{ij}{}^k (I(e^i)(e_l))(I(e^j)(x))(I(e_k)(e^l))$.

Puisque $I(e^i)(e_l) = \delta_{il}$ et $I(e_k)(e^l) = \delta_{kl}$, il en résulte que les seuls termes non nuls de la somme sont ceux où $i = k = l$, par suite $t(e_l, x, e^l) = \sum_j t_{lj}{}^l (I(e^j)(x))$.

En changeant l en i et par définition des opérations sur les tenseurs, nous avons $t(e_i, x, e^i) = (\sum_j t_{ij}{}^i I(e^j))(x))$

En permutant les sommes, nous avons : $\sum_i t(e_i, x, e^i) = (\sum_i \sum_j t_{ij}{}^i I(e^j))(x) = (\sum_j (\sum_i t_{ij}{}^i) I(e^j))(x)$.

On rappelle que la coordonnée u_j de u sur la base des $I(e^j)$ est $\sum_i t_{ij}{}^i$. Par suite $\sum_i t(e_i, x, e^i) = (\sum_j u_j I(e^j))(x) = u(x)$.

Le lecteur, en suivant mon exemple, montrera que pour tout $x \in E$, $v(x) = \sum_i t(x, e_i, e^i)$.

La preuve ci-dessus peut sembler complexe, car elle fait un usage parfois implicite des propriétés de linéarité des tenseurs et des propriétés des opérations sur le corps K. Ceux qui utilisent la convention d'Einstein sur les sommes implicites cachent encore plus cet usage implicite, que j'ai souhaité partiellement éviter.

Nous terminons par les relations entre un tenseur d'ordre 5 et ses contractions. Soit t le tenseur donné par ses coordonnés ${t_i}^{jk}{}_{lm}$ sur la base usuelle. Notons qu'il y a six contractions possibles, celles entre i et j, entre i et k, entre j et l, entre j et m, entre k et l, entre k et m. Nous décrivons seulement la contraction entre j et l.

Soit ${u_i}^k{}_m = \sum_j {t_i}^{jk}{}_{jm}$ et soit u le tenseur ayant ces coordonnées. Nous disons que le tenseur u est obtenu par la contraction entre j et l du tenseur t de coordonnées ${t_i}^{jk}{}_{lm}$. Nous avons pour tout $x, y, z \in E$, $u(x,y,z) = \sum_i t(x, e^i, y, e_i, z)$. La contraction diminue de 2 l'ordre du tenseur qui est contracté.

2.6 Symétrie, antisymétrie

Soit $t \in L(E^2 \to K)$ un tenseur d'ordre 2.

Le tenseur t est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $t(x,y) = t(y,x)$.

Le tenseur t est antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $t(x,y) = -t(y,x)$.

Théorème 38 *Tout tenseur d'ordre 2 est la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.*

Preuve : Soit $t \in L(E^2 \to K)$ un tenseur d'ordre 2. Soit $s(x,y) = (t(x,y) + t(y,x))/2$. Soit $a(x,y) = (t(x,y) - t(y,x))/2$. Il est évident que s est symétrique, que a est antisymétrique et que $t(x,y) = s(x,y) + a(x,y)$. $\square$

Ces notions de symétrie et d'antisymétrie peuvent s'étendre à un nombre quelconque d'arguments. Par exemple soit $t \in L(E^3 \to K)$ un tenseur d'ordre 3. Le tenseur t symétrique dans son *premier et troisième* argument si pour tous $x, y, z \in E$, $t(x,y,z) = t(z,y,x)$.

2.7 Produit extérieur et produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel de base $e_{i(0 \leq i < n)}$ et $g : E^2 \to \mathbb{R}$ un produit scalaire. Soit $x \in E$. À ce vecteur on associe le tenseur $I(x)$ associé à x et défini par : pour $y \in E$, $I(x)(y) = g(x,y)$.

Définition 39 (Produit extérieur) *Soient $x, y \in E$. Le produit extérieur $x \times y$ est un tenseur d'ordre 2, élément de $L(E^2 \to K)$, défini par $x \times y = I(x) \otimes I(y) - I(y) \otimes I(x)$*

De cette définition, il résulte que ce produit est antisymétrique, autrement dit vérifie $x \times y = -(y \times x)$.

Théorème 40 *Les tenseurs antisymétriques d'ordre 2 forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $L(E^2 \to K)$ engendré par la base $\{e_i \times e_j \mid i < j\}$, comportant $n(n-1)/2$ élements.*

Preuve : Soit t un tenseur antisymétrique d'ordre 2. Une base des tenseurs d'ordre 2 est $I(e_i) \otimes I(e_j)$. Puisque t est un tenseur d'ordre 2, nous avons $t = \sum_{i,j} t(e^i, e^j) I(e_i) \otimes I(e_j)$, où $e^{i(0 \leq i < n}$ est la base contravariante, relativement à g, de la base $e_{i(0 \leq i < n)}$.

Puisque t est antisymétrique, les $t(e^i,e^i)$ sont nuls, donc

$$t = \sum_{i<j} t(e^i,e^j) I(e_i) \otimes I(e_j) + \sum_{i>j} t(e^i,e^j) I(e_i) \otimes I(e_j)$$

.

Puique t est antisymétrique, $t(e^i,e^j) = -t(e^j,e^i)$, donc la somme ci-dessus se réécrit

$$t = \sum_{i<j} t(e^i,e^j) I(e_i) \otimes I(e_j) - \sum_{i>j} t(e^j,e^i) I(e_i) \otimes I(e_j)$$

.

En échangeant les deux indices liés de la deuxième somme ci-dessus, on obtient

$$t = \sum_{i<j} t(e^i,e^j) I(e_i) \otimes I(e_j) - \sum_{i<j} t(e^i,e^j) I(e_j) \otimes I(e_i)$$

.

Puisque les deux sommes portent sur le même domaine, on peut regrouper les deux sommes en une seule avec

$$t = \sum_{i<j} t(e^i,e^j)(I(e_i) \otimes I(e_j) - I(e_j) \otimes I(e_i))$$

.

Par définition du produit extérieur,

$$t = \sum_{i<j} t(e^i,e^j)(e_i \times e_j)$$

.

Par suite l'ensemble des $e_i \times e_j$ où $i < j$ engendre l'ensemble des tenseurs antisymétriques d'ordre 2.

Soit une combinaison linéaire des $e_i \times e_j$ où $i < j$ donnant le tenseur nul. C'est une combinaison linéaire des $I(e_i) \otimes I(e_j)$. Puisque les $I(e_i) \otimes I(e_j)$ sont une base des tenseurs d'ordre 2, cette combinaison linéaire a tous ses coefficients nuls. Donc l'ensemble des $e_i \times e_j$ où $i < j$, est un ensemble libre de tenseurs antisymétriques d'ordre 2.

Ainsi l'ensemble des $e_i \times e_j$ où $i < j$, qui est libre et qui engendre les tenseurs antisymétrique d'ordre 2, est une base de cet ensemble de tenseurs. Cette base a clairement $n(n-1)/2$ éléments.

□

Propriété 41 (Expression du produit extérieur) *Soient $x, y \in E$ où $x = \sum_i x^i e_i$ et $y = \sum_i y^i e_i$. Nous avons*

$$x \times y = \sum_{i<j} (x^i y^j - x^j y^i)(e_i \times e_j)$$

Preuve : Par définition du produit extérieur

$$x \times y = I(\sum_i x^i e_i) \otimes I(\sum_j y^j e_j) - I(\sum_i y^i e_i) \otimes I(\sum_j x^j e_j)$$

Par linéarité de I et les propriétés de la somme, on a

$$x \times y = \sum_{i,j} x^i y^j I(e_i) \otimes I(e_j) - \sum_{i,j} y^i x^j I(e_i) \otimes I(e_j) = \sum_{i,j} (x^i y^j - y^i x^j)(I(e_i) \otimes I(e_j))$$

Puisque $x \times y$ est un tenseur antisymétrique, comme dans la preuve de 40, il en résulte que

$$x \times y = \sum_{i<j} (x^i y^j - x^j y^i)(e_i \times e_j)$$

□

Dans les textes français, le produit vectoriel de deux vecteurs x, y est noté $x \wedge y$. Par contre dans les textes anglais, la même notation est utilisée pour le produit vectoriel et le produit extérieur. Nous défendons ci-dessous les habitudes françaises tout en montrant les relations entre ces deux produits.

Définition 42 (Produit vectoriel) *Soit E un espace vectoriel, de base e_1, e_2, e_3.*
Soient $x, y \in E$ où $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ et $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3$.
Le produit vectoriel de x et y est noté $x \wedge y$ et est défini par

$$x \wedge y = (x^2 y^3 - x^3 y^2) e_1 + (x^3 y^1 - x^1 y^3) e_2 + (x^1 y^2 - x^2 y^1) e_3$$

Nous rappelons certaines des propriétés, faciles à prouver, de ce produit. Il est linéaire dans chacun de ses deux arguments. Il est antisymétrique. Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} e_1 \wedge e_2 &= e_3 \\ e_2 \wedge e_3 &= e_1 \\ e_3 \wedge e_1 &= e_2 \end{aligned}$$

Par définition du produit vectoriel et les relations entre les vecteurs de la base, nous avons

$$x \wedge y = (x^2 y^3 - x^3 y^2)(e_2 \wedge e_3) + (x^3 y^1 - x^1 y^3)(e_3 \wedge e_1) + (x^1 y^2 - x^2 y^1)(e_1 \wedge e_2) \quad (28)$$

D'après l'expression du produit extérieur 41, nous avons

$$x \times y = (x^1 y^2 - x^2 y^1)(e_1 \times e_2) + (x^1 y^3 - x^3 y^1)(e_1 \times e_3) + (x^2 y^3 - x^3 y^2)(e_2 \times e_3) \quad (29)$$

À cause de l'antisymétrie du produit extérieur, cette égalité se réécrit

$$x \times y = (x^2 y^3 - x^3 y^2)(e_2 \times e_3) + (x^3 y^1 - x^1 y^3)(e_3 \times e_1) + (x^1 y^2 - x^2 y^1)(e_1 \times e_2) \quad (30)$$

Les égalités 28 et 30 donnent presque la même définition de $x \wedge y$ et de $x \times y$, mais il ne faut pas oublier que $x \wedge y$ est un vecteur et $x \times y$ est un tenseur.

Soit $J : E \to L(E \to K)$ l'application linéaire définie, sur la base de E par $J(e_1) = e_2 \times e_3$, $J(e_2) = e_3 \times e_1$, $J(e_3) = e_1 \times e_2$, d'après la définition 42 du produit vectoriel et l'expression 29 du produit extérieur, nous avons

$$J(x \wedge y) = x \times y$$

Soit $H : L(E \to K) \to E$ l'application linéaire *inverse* de J, autrement dit vérifiant $H(e_2 \times e_3) = e_1, H(e_3 \times e_1) = e_2, H(e_1 \times e_2) = e_3$. D'après l'expression 29 du produit extérieur, nous avons

$$H(x \times y) = x \wedge y$$

Informellement nous disons qu'en échangeant les vecteurs de la base e_1, e_2, e_3 respectivement par les tenseurs $e_2 \times e_3, e_3 \times e_1, e_1 \times e_2$, on échange le vecteur $x \wedge y$ et le tenseur $x \times y$, qui ont les mêmes coordonnées sur leur bases respectives.

Références

[1] Aurélien BARRAU et Julien GRAIN. *Relativité générale*. Dunod, 2016.

[2] Nathalie DERUELLE et Jean-Philippe UZAN. *Théories de la Relativité*. Belin, 2014.

[3] Fabien DOURNAC. *tensor-calculus*. URL : https://dournac.org/sciences/tensor_calculus/ (visité le 07/03/2018).

[4] Albert EINSTEIN. *Quatre conférences sur la théorie de la relativité*. Gauthier-Villars, 1971.

[5] Richard FEYMAN, Robert LEIGHTON et Matthew SANDS. *Électromagnetisme 1*. Dunod, 2013.

[6] Richard FEYMAN, Robert LEIGHTON et Matthew SANDS. *Électromagnetisme 2*. Dunod, 2013.

[7] Jean GARRIGUES. *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*. URL : http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/File/TenseursMMC.pdf (visité le 04/12/2021).

[8] David LANGLOIS. *Introduction à la relativité*. Vuibert, 2011.

[9] Marie-Pierre LEBAUD. *formes quadratiques*. URL : https://perso.univ-rennes1.fr/marie-pierre.lebaud/agint/ecrit/algebre-lineaire/ (visité le 07/03/2018).

[10] André LICHNEROWICZ. *Éléments de Calcul tensoriel*. Armand Colin, 1964.

[11] Claude SEMAY et Bernard SYLVESTRE-BRAC. *Relativité restreinte*. Dunod, 2010.

[12] Bernard YCART. *Algèbre Linéaire*. URL : https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/ (visité le 07/03/2018).