Mouvement à force centrale

Michel Lévy

15 janvier 2024

Table des matières

1 Coordonnées polaires **2**

2 Mouvement à force centrale **2**

3 Mouvement à deux corps **4**

Références **6**

Résumé

On dérive les lois de Kepler des lois de Newton sur l'interaction entre des points matériels. Puis on montre comment résoudre le problème à deux corps. J'écris cette dérivation, car les présentations que j'ai lues (généralement sur le web), dans la mesure où elles reprennent des preuves souvent faites, omettent beaucoup de détails et rendent souvent les preuves incompréhensibles.

1 Coordonnées polaires

Soit R un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'angle $\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}$ vaut $\pi/2$.

Si, dans ce repère, les coordonnées polaires du point P sont r, θ c'est que la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est r et que l'angle $\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP}}$ vaut θ. Dans ce cas, les coordonnées cartésiennes de P sont $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$.

Si, dans ce repère, les coordonnées cartésiennes de P sont x, y, alors ses coordonnées polaires sont r, θ, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta =$ si $x \geq 0$ alors $\arctan(y/x)$ sinon $\pi + \arctan(y/x)$.

2 Mouvement à force centrale

Nous étudions la trajectoire d'un point P de masse m dans un repère R d'origine O. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est aussi désigné par $\overrightarrow{r}$. La norme d'un vecteur est notée en enlevant la flèche du vecteur, c'est ainsi que r est la norme du vecteur $\overrightarrow{r}$ et que OP est la norme de $\overrightarrow{OP}$. Le vecteur $\hat{r}$ est le vecteur $\overrightarrow{r}/r$, vecteur unitaire (de norme 1) dans la direction de $\overrightarrow{r}$.

Nous étudions la trajectoire de P dans un mouvement à force centrale, en $1/r^2$, autrement dit P est soumis à la seule force attractive $\overrightarrow{F} = -(K/r^2)\hat{r}$.

Comme il est usuel en physique, on note une dérivée par rapport au temps avec un point au dessus de la quantité dérivée. Ainsi la vitesse de P est notée $\dot{\vec{r}}$ et son accélération $\ddot{\vec{r}}$.

D'après la deuxième loi du mouvement de Newton, puisque la masse de P est m, nous avons :

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m = -(K/mr^2)\hat{r} \qquad (1)$$

Soit $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}$ le *moment cinétique* de P relativement au point O vers lequel est dirigée la force centrale. On montre que $\dot{\vec{L}}$ est nul, autrement dit $\vec{L}$ est un vecteur constant. Puisque $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et que L est normal à $\vec{r}$, la trajectoire de P est dans un plan passant par O et normal à $\vec{L}$.

preuve : D'après la formule [1] de la dérivée d'un produit vectoriel, on a : $\dot{\vec{L}} = m(\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}})$. Le premier produit vectoriel de cette somme est trivialement nul. Puisque la force est centrale, l'accélération de P est parallèle à $\vec{r}$ dont le deuxième produit vectoriel est aussi nul. □

Soit $\vec{A} = (1/K)(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L}) - \hat{r}$. Puisque ce vecteur est combinaison de deux vecteurs normaux à $\vec{L}$, il est normal à $\vec{L}$. Ce vecteur est appelé parfois vecteur de Runge-Lenz et parfois vecteur excentricité. On montre qu'il est constant en montrant que sa dérivée relativement au temps est nulle.

preuve : $\dot{\vec{A}} = (1/K)(\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{L} + \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{L}}) - \dot{\hat{r}}$. Puisque, comme on l'a vu ci-dessus, la dérivée de $\vec{L}$, par rapport au temps, est nulle, on a :

$$\dot{\vec{A}} = (1/K)(\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{L}) - \dot{\hat{r}}. \tag{2}$$

Rapportons l'espace au repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ et où la direction de $\vec{k}$ est celle de $\vec{L}$.

Soit θ l'angle $\widehat{\vec{i}, \hat{r}}$. Puisque $\hat{r}$ est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\hat{r} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$.

Soit $\hat{\theta}$ le vecteur unitaire de ce même plan, tel que $\widehat{\hat{r}, \hat{\theta}} = \pi/2$. Par définition de ce vecteur, $\hat{\theta} = \cos(\theta + \pi/2)\vec{i} + \sin(\theta + \pi/2)\vec{j}$. Donc $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.

Il est immédiat que $d\hat{r}/d\theta = \hat{\theta}$. Par composition des dérivées, $\dot{\hat{r}} = (d\hat{r}/d\theta)\dot{\theta}$. Donc

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \tag{3}$$

Par le calcul dans le repère R, sachant que $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$, on en déduit que

$$\vec{k} = \hat{r} \wedge \hat{\theta} \tag{4}$$

Rappelons que $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}}$. Puisque $\vec{r} = r\hat{r}$, par dérivation, nous avons $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$. En remplaçant $\vec{r}$ par $r\hat{r}$, $\dot{\vec{r}}$ par $\dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$ dans l'expression de $\vec{L}$ et en simplifiant le produit vectoriel, car $\vec{r}$ et $\hat{r}$ sont parallèles, on obtient :

$$\vec{L} = mr^2(\hat{r} \wedge \dot{\hat{r}}) \tag{5}$$

De 3, 4 et 5, on déduit que

$$\vec{L} = (mr^2)\dot{\theta}\vec{k} \tag{6}$$

De 1 et 2 on déduit que

$$\dot{\vec{A}} = (-1/(mr^2))(\hat{r} \wedge \vec{L}) - \dot{\hat{r}} \tag{7}$$

De 6 et 7 on déduit que

$$\dot{\vec{A}} = -(\dot{\theta}(\hat{r} \wedge \vec{k})) - \dot{\hat{r}} \tag{8}$$

De 3 et 8 on déduit que

$$\dot{\vec{A}} = -\dot{\theta}(\hat{r} \wedge \vec{k} + \hat{\theta}) \tag{9}$$

Puisque $\vec{k} = \hat{r} \wedge \hat{\theta}$, on a aussi $\hat{\theta} = -(\hat{r} \wedge \vec{k})$, ce qui montre, d'après 9, que $\dot{\vec{A}}$ est nul, donc que $\vec{A}$ est constant.

$\square$

Rappelons que $\vec{A} = (1/K)(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L}) - \hat{r}$. Donc $\vec{r}.\vec{A} = rA\cos\theta = (1/K)(\vec{r}.(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L})) - r$. D'après les identités du produit mixte, $\vec{r}.(\dot{\vec{r}} \wedge \vec{L}) = \vec{L}.(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = \vec{L}.(\vec{L}/m) = L^2/m$.

Posons $p = L^2/(mK)$. Nous avons $r = p/(1 + A\cos\theta)$. Puisque A et p sont des constantes, ainsi que nous l'avons prouvé, cette équation est l'équation polaire d'une conique de paramètre p et d'excentricité A dans le repère $O, \vec{i}, \vec{j}$ où θ est l'angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OP}$. Nous retrouvons ainsi la première loi de Kepler : la trajectoire des planètes est une ellipse (lorsque $A < 1$) de foyer O.

3 Mouvement à deux corps

Nous montrons comment *réduire* ce mouvement au cas précédent du mouvement d'un corps sous l'action d'une force centrale. Je suis dans cette partie le cours excellent de Jimmy Roussel. Mais je ne résiste pas à l'envie de faire une présentation un peu différente.

Soit R un repère inertiel d'origine O. Soit M_1 un point de masse m_1 et M_2 un point de masse m_2. Soit $\overrightarrow{f_{12}}$ la force d'attraction exercée par M_1 sur M_2 et $\overrightarrow{f_{21}}$ la force d'attraction exercée par M_2 sur M_1. On suppose que ce sont les seules forces présentes.

D'après la troisième loi du mouvement de Newton, ces forces sont opposées, c'est-à-dire $\overrightarrow{f_{12}} = -\overrightarrow{f_{21}}$.

Soit G le barycentre de M_1 et M_2. Par définition du barycentre

$$\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} \tag{10}$$

D'après l'équation ci-dessus, $\ddot{\overrightarrow{OG}} = m_1\ddot{\overrightarrow{OM_1}} + m_2\ddot{\overrightarrow{OM_2}}$. D'après la deuxième loi du mouvement de Newton, $\ddot{\overrightarrow{OM_1}} = \overrightarrow{f_{21}}/m_1$ et $\ddot{\overrightarrow{OM_2}} = \overrightarrow{f_{12}}/m_2$. Par suite $\ddot{\overrightarrow{OG}} = \overrightarrow{f_{21}} + \overrightarrow{f_{12}}$ et puisque ces deux forces sont opposées, l'accélération de G est nulle. Soit S le repère d'origine G et dont les vecteurs de base sont identiques à ceux de R. Puisque R est inertiel et que l'accélération de G relativement à R est nulle, S est aussi un repère inertiel.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$. Par définition de M, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}$. En remplaçant O par G dans 10, on obtient :

$$\overrightarrow{GM_1} = -(m_2/m_1)\overrightarrow{GM_2} \qquad \overrightarrow{GM_2} = -(m_1/m_2)\overrightarrow{GM_1} \tag{11}$$

De ces équations et de ce que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}$, on déduit que :

$$\overrightarrow{GM_2} = (m_1/(m_1+m_2))\overrightarrow{GM} \qquad \overrightarrow{GM_1} = (m_2/(m_1+m_2))\overrightarrow{GM} \tag{12}$$

Nous verrons que le point M suit une trajectoire conique dans un plan passant par G. Dans ce même plan, le point M_1 (resp. M_2) est obtenu de M par une homothétie de centre G et de rapport $m_2/(m_1+m_2)$ (resp. $m_1/(m_1+m_2)$). Donc M_1 et M_2 parcourrent des coniques homothétiques de celle parcourrue par M.

D'après les équations ci-dessus, $\overrightarrow{GM} = ((m_1+m_2)/m_1)\overrightarrow{GM_2}$. En dérivant deux fois par rapport au temps, on a $\ddot{\overrightarrow{GM}} = ((m_1+m_2)/m_1)\ddot{\overrightarrow{GM_2}}$. Puisque le repère S d'origine

G est inertiel, dans ce repère, d'après la deuxième loi du mouvement de Newton, nous avons : $\overrightarrow{\ddot{GM}} = ((m_1+m_2)/m_1m_2)\overrightarrow{f_{12}}$. Dans la suite nous posons $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ qui est appelée la masse réduite et nous avons $\overrightarrow{\ddot{GM}} = \overrightarrow{f_{12}}/\mu$.

D'après la loi de l'attraction universelle, $\overrightarrow{f_{12}} = -(gm_1m_2/(M_1M_2)^2)\hat{r}$ où $\hat{r}$ est un vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2. La constante de gravitation universelle est notée g, car la majuscule G est déjà prise pour désigner le barycentre de M_1 et M_2.

Puisque par définition de M, $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$, nous avons $\overrightarrow{f_{12}} = -(K/(GM)^2)\hat{r}$ où $K = gm_1m_2$ et où $\hat{r}$ est un vecteur unitaire dirigé de G vers M. Par conséquent

$$\overrightarrow{\ddot{GM}} = -(K/(\mu(GM)^2))\hat{r} \tag{13}$$

D'après les notations du paragraphe précédent, M est un point (dit fictif) de masse réduite μ dans une attraction à force centrale de centre G en $K/(GM)^2$. D'après le paragraphe précédent, la trajectoire de M est une conique de foyer G dans un plan normal au moment cinétique de M relativement à G

Références

[1] *Fonction à valeurs vectorielles*. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_%C3%A0_valeurs_vectorielles (visité le 21/07/2019).

[2] Jimmy ROUSSEL. *problème à deux corps*. URL : https://femto-physique.fr/mecanique/forces-centrales.php (visité le 21/07/2019).

[3] Claude SEMAY et Bernard SYLVESTRE-BRAC. *Relativité restreinte*. Dunod, 2010.

[4] *Vecteur excentricité*. URL : https://fr.wikipedia.org/wiki/Vecteur_excentricit%C3%A9#Mise_en_%C3%A9vidence_du_vecteur_excentricit%C3%A9[R_1] (visité le 22/07/2019).